Ecuaciones en derivadas parciales

$\boxed{\text{Problemas}}$ ~ modelos matemáticos de fenómenos físicos

↓

Conjunto de ecuaciones

→ ecuaciones diferenciales ordinarias
→ ecuaciones en derivadas parciales
→ condiciones de borde (o de contorno)
→ condiciones iniciales

Dado un problema: tiene solución?

Solución única?

Solución estable?

} Cómo hallar una/la solución?

Problema bien planteado: tiene solución única y es estable.

Ejemplos

① $(u'_t(x,t))^2 + (u'_x(x,t))^2 = -1$ → no solución real

② $u''_{xx}(x,t) = u'_t(x,t) \quad x>0, t>0$

$u(x,0) = 0 \quad x>0$

$u(0,t) = 0 \quad t>0$

Soluciones:

$u(x,t) = \frac{x}{t^{3/2}} e^{-x^2/4t} \quad x>0, t>0$

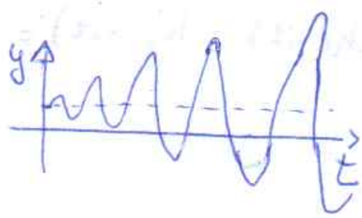
$u(x,t) = 0$

no sol. ~~...~~ única

③ $y''(t) + y(t) = 1 + \varepsilon \cos t, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

si $\varepsilon = 0$: $y(t) = 1$

si $\varepsilon > 0$ $\quad y(t) = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon t \operatorname{sen} t$ →



no es estable.

Ecuaciones en derivadas parciales:

		Var. indep.	Var depend. (incógnita)
(A)	$u''_{xx}(x,t) + u(x,t) \cdot u'_t(x,t) = 0$	x, t	u
(B)	$u''_{xx}(x,t) - u''_{tt}(x,t) = 0$	x, t	u
(C)	$x u(x,y) + u'_y(x,y) = x^2 + y$	x, y	u
(D)	$h''_{xx}(x,y,z) + h''_{yy}(x,y,z) + h''_{zz}(x,y,z) = 0$	x, y, z	h
(E)	$T''_{xx}(x,y,t) + T''_{yy}(x,y,t) = -T'_t(x,y,t)$	x, y, t	T

Ecuación lineal: si es una ecuación de primer grado en la variable dependiente y en sus derivadas.

de los ejemplos son lineales: B, C, D, E

Ejemplos de no lineales:

(F) – $u'^2_t = u'_x$

(G) – $u \cdot u''_{xx} + 1 = 0$

(H) – $u''_{xx} + u^n = x^n$ $\quad n \geq 2$

Problema lineal: si todas las ecuaciones que aparecen son lineales en la var. dependiente y sus derivadas

Ecuación lineal homogénea: todos los términos no nulos son de primer grado en la variable dependiente y sus derivadas

Problema lineal homogéneo: todas las ecuaciones ~~tae~~ son lineales homogéneas.

Ej: homogénea

$T''_{xx} + T''_{yy} = 0$

$x.h(x,t) + h'_t(x,t) = h''_{xx}(x,t)$

no homogénea

$T''_{xx} + T''_{yy} = x$

$x h(x,t) + h'_t(x,t) = h''_{xx}(x,t) + x^2 t$

Operadores

$$\xrightarrow{u} \boxed{\mathcal{L}} \xrightarrow{} \mathcal{L}(u) \qquad \mathcal{L}: \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$$

$u \in \mathcal{F}_1$ $\qquad$ $\mathcal{L}(u) \in \mathcal{F}_2$

Ej: $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathcal{F}_1$: funciones derivables c.r x

$\mathcal{L} = \nabla$ en $\mathcal{F}_1$: funciones ~~de~~ $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, derivables.

$\mathcal{L} = \int_a^x \cdot \, dt$ en $\mathcal{F}_1$: funciones continuas

Operador diferencial

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad \mathcal{L}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad \mathcal{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 3 \qquad \mathcal{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 3$$

Operador diferencial lineal:

Si $\mathcal{L}(\lambda u + v) = \lambda \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$ para todo $u, v \in \mathcal{F}_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$

Extendiendo: $\mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathcal{L}(u_j)$, $u_j \in \mathcal{F}_1$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$

Ejemplos de operadores diferenciales lineales.

- $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

- $\mathcal{L} = x \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \to \mathcal{L}(u) = x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t}$

$$\mathcal{L}(u+v) = x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u+v)\right) + \frac{\partial}{\partial t}(u+v)$$

$$= x\frac{\partial^2}{\partial x^2} u + x\frac{\partial^2}{\partial x^2} v + \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial t} v$$

$$= \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$$

$$\mathcal{L}(\lambda u) = x \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\lambda u) + \frac{\partial}{\partial t}(\lambda u) = \ldots = \lambda \mathcal{L}(u)$$

No es lineal:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y} \qquad \mathcal{L}(u+v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial x}\cdot\frac{\partial(u+v)}{\partial y} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}_{\mathcal{L}(u)+\mathcal{L}(v)} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

Toda E.D. lineal homogénea puede ponerse:

$\mathcal{L}(u) = 0$ siendo $\mathcal{L}$ un op. dif. lineal

Un operador lineal de orden 2 en un espacio de funciones de 2 var. indep: tiene la forma

$$\mathcal{L} = A(x,y)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B(x,y)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + F(x,y)\cdot$$

Un problema de EDP con variables indep $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L}(u(\bar{x})) = f(\bar{x}) & \bar{x}\in\Omega \\ \mathcal{L}_1(u(\bar{x})) = f_1(\bar{x}) & \bar{x}\in\partial_1\Omega \\ \vdots & \\ \mathcal{L}_k(u(\bar{x})) = f_k(\bar{x}) & \bar{x}\in\partial_k\Omega \end{array}}$$

$\partial_1\Omega$: parte de la frontera de Ω

Principio de superposición

Si $u_1, u_2, \ldots u_n$ satisfacen la E.D. lineal homogénea $\mathcal{L}(u)=0$ entonces $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$ también la satisface, siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ constantes arbitrarias.

Dem: $\mathcal{L}(u_j)=0$ por hipótesis.

$$\mathcal{L}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n) \underset{\text{lineal}}{=} \lambda_1\mathcal{L}(u_1) + \lambda_2\mathcal{L}(u_2) + \ldots + \lambda_n\mathcal{L}(u_n) = 0$$

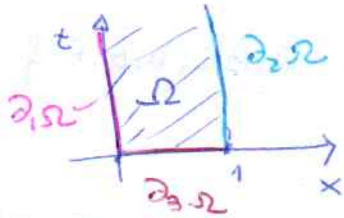
Ejemplo:

$$u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t) \qquad 0<x<1,\ t>0$$

$$u_x(0,t)=0 \qquad t>0$$

$$u_x(1,t)=0 \qquad t>0$$

son 3 ED. lineales homogéneas



$$u_k(x,t) = e^{-k^2\pi^2 t} \cdot \cos(k\pi x) \qquad k=1,2,\ldots$$

Son solución de cada uno de las E.D.

$$u(x,t) = \frac{1}{2} e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x) + 3\, e^{-4\pi^2 t} \cos(2\pi x) - 9\, e^{-25\pi^2 t} \cos(5\pi x)$$

$$= \frac{1}{2} u_1(x,t) + 3 u_2(x,t) - 9 u_5(x,t)$$ es solución de las tres E.D.

En un problema lineal no homogéneo?

$$P \begin{cases} \mathcal{L}(u) = f(\bar{x}) & \bar{x}\in\Omega \\ \mathcal{L}_1(u) = f_1(\bar{x}) & \bar{x}\in\partial_1\Omega \\ \mathcal{L}_2(u) = f_2(\bar{x}) & \bar{x}\in\partial_2\Omega \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \mathcal{L}(u)=f(\bar{x}) & \bar{x}\in\Omega \\ \mathcal{L}_1(u)=0 & \bar{x}\in\partial_1\Omega \\ \mathcal{L}_2(u)=0 & \bar{x}\in\partial_2\Omega \end{matrix}}_{P_1} \qquad \underbrace{\begin{matrix} \mathcal{L}(u)=0 & \bar{x}\in\Omega \\ \mathcal{L}_1(u)=f_1 & \bar{x}\in\partial_1\Omega \\ \mathcal{L}_2(u)=0 & \bar{x}\in\partial_2\Omega \end{matrix}}_{P_2} \qquad \underbrace{\begin{matrix} \mathcal{L}(u)=0 & \bar{x}\in\Omega \\ \mathcal{L}_1(u)=0 & \bar{x}\in\partial_1\Omega \\ \mathcal{L}_2(u)=f_2 & \bar{x}\in\partial_2\Omega \end{matrix}}_{P_3}$$

Si u_1 es solución de P_1, u_2 solución de P_2 y u_3 solución de P_3

$\Rightarrow$ $u = u_1 + u_2 + u_3$ es sol de P:

$$\mathcal{L}(u) \underset{\text{lineal}}{=} \mathcal{L}(u_1) + \mathcal{L}(u_2) + \mathcal{L}(u_3) = f + 0 + 0 = f$$

$$\mathcal{L}_1(u) = \mathcal{L}_1(u_1) + \mathcal{L}_1(u_2) + \mathcal{L}_1(u_3) = 0 + f_1 + 0 = f_1$$

$$\mathcal{L}_2(u) = \mathcal{L}_2(u_1) + \mathcal{L}_2(u_2) + \mathcal{L}_2(u_3) = 0 + 0 + f_2 = f_2$$

6

Clasificación de EDP de orden 2.

EDP de orden 2 con 2 variables:

$$A u''_{xx} + B u''_{xy} + C u''_{yy} + D u'_x + E u'_y + F \cdot u = f$$

donde A, B, C, D, E, F, f son funciones de las variables independientes x, y (posiblemente constantes)

Con cambio de variable se puede transformar: $(\alpha, \beta) = T(x, y)$

$$a u''_{\alpha\alpha} + b u''_{\beta\beta} + c u'_\alpha + d u'_\beta + e \cdot u = \tilde{f}$$

$a, b, c, d, e, \tilde{f}$: funciones de las var. indep α, β.

- Si a y b del mismo signo: Elíptica $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ (Ec. Laplace)
- si $a = 0$ o $b = 0$: parabólica $K u''_{xx} - u'_t = 0$ (Ec. calor)
- si a y b de signo contrario: hiperbólica $u''_{xx} - u''_{tt} = 0$ (Ec. onda)

Ojo: la clasificación depende del dominio

↳ Ec. Fricomi: $u''_{xx} + x \cdot u''_{yy} = 0$. elíptica en semiplano derecho $x>0$

Ej hiperbólico en semip. izquierdo $x<0$

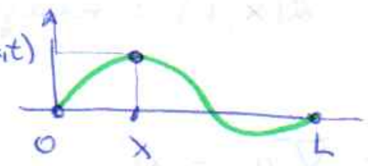
Flujo de aire en ala avión:

Con fricción: $\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ v: velocidad del medio v_0: velocidad del sonido

elíptica si $v < v_0$

hiperbólico si $v > v_0$ → (ondas de choque)

Ecuación de onda unidimensional:



$$c^2 u''_{xx} = u''_{tt} \qquad \begin{array}{l} 0<x<L \\ t>0 \end{array}$$

c: constante.

Extremos fijos: $\begin{array}{l} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{array} \quad t>0$

Fuerza externa (peso)

$$c^2 u''_{xx} - g = u''_{tt} \qquad g\text{: aceleración gravedad.}$$

Fuerza externa (amortiguación)

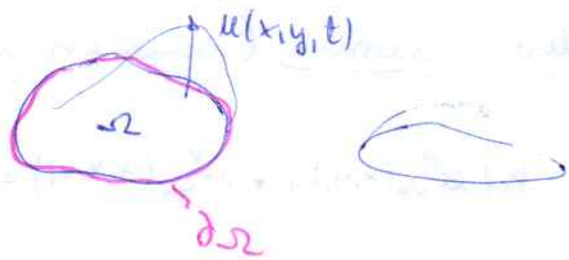
$$c^2 u''_{xx} - b \cdot u'_t = u''_{tt}$$

(Se asume:
cuerda elástica, densidad constante
no hay desplazamientos - o son despreciables - en dirección horizontal)

Membrana vibrante.

$$c^2\left(u''_{xx} + u''_{yy}\right) = u''_{tt} \qquad \begin{array}{l} (x,y)\in\Omega \\ t>0 \end{array}$$

$$u(x,y,t) = 0 \qquad \begin{array}{l} (x,y)\in\partial\Omega \\ t>0 \end{array}$$



Ecuación del calor

$u(\bar{x},t)$: temperatura en el pto $\bar{x}$ de un cuerpo Ω, en tiempo t.

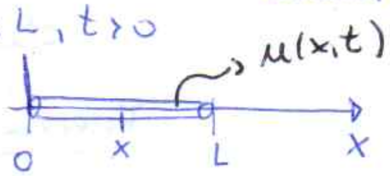
$$k \cdot \nabla^2 u = u'_t \qquad \bar{x} \in \Omega$$

$\nabla^2 u = \Delta u = \nabla \cdot \nabla u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$ (en $\mathbb{R}^3$)

k: difusividad térmica, $k > 0$.

Unidimensional: (calor en una barra homogénea, aislada en su lateral)

$$k\, u''_{xx}(x,t) = u'_t(x,t) \qquad 0 < x < L,\ t > 0$$



Extremos a temp. constante:

$u(0,t) = t_1$
$u(L,t) = t_2$ $\quad t > 0$

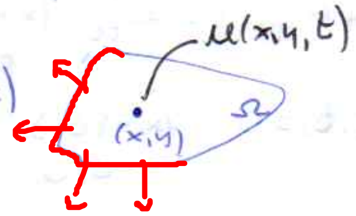
Temperatura inicial

$u(x,0) = f(x) \quad 0 < x < L$

Bidimensional (calor en lámina plana homogénea, aislada en su cara)

$$k\left(u''_{xx}(x,y,t) + u''_{yy}(x,y,t)\right) = u'_t(x,y,t)$$

si $(x,y) \in \Omega$, $t > 0$



Temperatura inicial:

$u(x,y,0) = f(x,y) \quad (x,y) \in \Omega$

Bordes a temp. constante:

$u(x,y,t) = g(x,y)$ si $(x,y) \in \partial\Omega$, $t > 0$

o: Bordes aislados: $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y,t) = 0 \qquad (x,y) \in \partial\Omega$

$\bar{n}$: dirección normal a $\partial\Omega$

Calor bidimensional, estado estacionario:

$$\underbrace{u''_{xx} + u''_{yy} = 0}_{\text{Ecuación de Laplace}} \qquad (x,y) \in \Omega$$

Ecuación de Laplace $\quad \Delta u = 0$

$\nabla^2 u = 0$

u: armónica

Modela: distribución estacionaria de calor $\qquad$ (ver clase 12)

potencial electrostático

potencial de velocidad

Ecuación de Laplace en polares:

$$\underbrace{u''_{rr} + \frac{1}{r} u'_r + \frac{1}{r^2} u''_{\theta\theta}}_{\Delta u} = 0$$

En $\mathbb{R}^3$: cilíndricas: $u''_{rr} + \frac{1}{r} u'_r + \frac{1}{r^2} u''_{\theta\theta} + u''_{zz} = 0$

esféricas: $\frac{1}{r}(ru)_{rr} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} u''_{\phi\phi} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} (u'_\theta \operatorname{sen}\theta)_\theta = 0$

Cuerda vibrante infinita (?!)

$$c^2 u''_{xx}(x,t) = u''_{tt}(x,t) \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u'_t(x,0) = g(x)$$

Cambio variables: $\alpha = x + ct$ $\quad$ $\alpha = \alpha(x,t)$
$\beta = x - ct$ $\quad$ $\beta = \beta(x,t)$

$$u(x,t) = U(\alpha(x,t), \beta(x,t))$$
$$u'_x = U'_\alpha \cdot \alpha'_x + U'_\beta \cdot \beta'_x = U'_\alpha + U'_\beta$$
$$u''_{xx} = U''_{\alpha\alpha} \cdot \alpha'_x + U''_{\alpha\beta} \cdot \beta'_x + U''_{\beta\alpha} \alpha'_x + U''_{\beta\beta} \beta'_x = U''_{\alpha\alpha} + 2U''_{\alpha\beta} + U''_{\beta\beta}$$

$$u'_t = U'_\alpha \cdot \alpha'_t + U'_\beta \cdot \beta'_t = c U'_\alpha - c U'_\beta$$
$$u''_{tt} = c\left(U''_{\alpha\alpha} \alpha'_t + U''_{\alpha\beta} \beta'_t - U''_{\beta\alpha} \alpha'_t - U''_{\beta\beta} \beta'_t\right) =$$
$$= c\left(c U''_{\alpha\alpha} - c U'_{\alpha\beta} - c U'_{\beta\alpha} + U''_{\beta\beta} \cdot c\right) =$$
$$= c^2\left(U''_{\alpha\alpha} - 2U''_{\alpha\beta} + U''_{\beta\beta}\right)$$

$$\Rightarrow c^2 u''_{xx} - u''_{tt} = c^2 . 4 . U''_{\alpha\beta} = 0$$

Entonces: $U(\alpha, \beta) = H(\alpha) + K(\beta)$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = H(x+ct) + K(x-ct)} \quad \text{con } H, K\ C^2 \text{ en } \mathbb{R}.$$

$\hookrightarrow$ sol. general de la E.D.D.P.

Condiciones iniciales:

$u(x,0) = f(x)$ $\qquad$ $u(x,0) = H(x) + K(x) = f(x)$

$u'_t(x,0) = g(x)$ $\quad \Rightarrow \quad u'_t(x,0) = H'(x) \cdot c - K'(x) \cdot c = g(x)$

$$H'(x) = f'(x) - k'(x)$$

$$f'(x) - 2k'(x) = \frac{g(x)}{c}$$

$$k'(x) = \left(f'(x) - \frac{g(x)}{c}\right)\frac{1}{2} \rightarrow k(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz$$

$$\Rightarrow H'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}\left(f'(x) - \frac{g(x)}{c}\right).$$

$$H'(x) = \frac{f'(x)}{2} + \frac{g(x)}{2c} \longrightarrow H(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz$$

$$\Rightarrow u(x,t) = H(x+ct) + k(x-ct)$$

$$= \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\left[\int_{x_0}^{x+ct} g(z)\,dz - \int_{x_0}^{x-ct} g(z)\,dz\right]$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)\,dz}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{G(x+ct) + G(x-ct)}{2}}$$

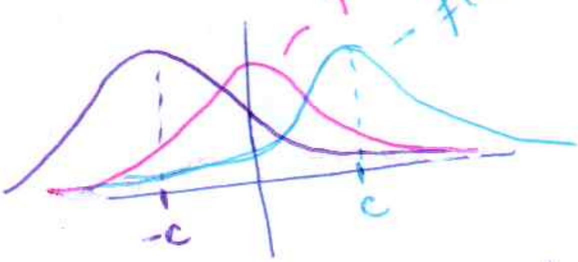
$$G(x) = \left(\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz\right)\frac{1}{c}$$

→ Fórmula de D'Alembert

Observen! si $g(x) = 0$,

$t = 0 \quad u(x,t) = f(x)$

$t = 1 \quad u(x,t) = \dfrac{f(x+c) + f(x-c)}{2}$



$t = 2 \quad u(x,t) = \dfrac{f(x+2c) + f(x-2c)}{2}$

u: promedio de celeste y violeta